

**Припрема за четврти писмени задатак**

**Криве другог реда**

**1. Написати једначину**

- а) елипсе која садржи тачку  $A(3, \sqrt{2})$ , а већа оса јој је  $2\sqrt{15}$   
 б) хиперболе чија су темена у жижама, а жиже у теменима елипсе  $9x^2 + 25y^2 = 225$   
 в) кружнице описаног око троугла чија су темена  $A(-5, -8)$ ,  $B(-5, 2)$  и  $C(3, 0)$   
 г) кружнице који је концентричан са кругом  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  и пролази кроз тачку  $M(3, 2)$   
 д) хиперболе ако је растојање између жижа једнако  $10\sqrt{2}$ , а ј-не њених асимптота су  $y = \pm \frac{3}{4}x$   
 њ) кружнице са центром у тачки  $C(3, 1)$ , која на правој  $2x - 5y + 18 = 0$  одсеца тетиву дужине 6.  
 е) кружнице која садржи тачке  $A(-3, -4)$  и  $B(5, 2)$  а центар јој се налази на правој  $3x + y - 2 = 0$

**2. Израчунати ексцентрицитет**

- а) елипсе чије је растојање између жижа једнако растојању између крајњих тачака велике и мале полуосе.  
 б) хиперболе чија асимптота заклапа са  $Ox$ -осом угао од  $60^\circ$ .

**3. Одредити једначину заједничке тетиве кривих  $x^2 + y^2 = 10$  и  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ .**

**4. Праве  $ax + y - 3 = 0$  и  $x - by + 2 = 0$  секу се у центру кружнице  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$ . Одредити угао између ових правих.**

**5. Ако је дата права тангента дате криве одредити координате додирне тачке:**

- а)  $y = kx - 5$  и  $x^2 + y^2 - 4x = 1$       б)  $kx - 3y - 24 = 0$  и  $x^2 - y^2 = 36$

ЈЕДНАЧИНА ТАНГЕНТЕ НА КРИВУ У ТАЧКИ $(x_1, y_1)$ КОЈА ПРИПАДА КРИВОЈ	
КРИВА	ЈЕДНАЧИНА ТАНГЕНТЕ
$\mathcal{K}$ : $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$	$t: (x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$
$\mathcal{E}$ : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ )	$t: \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ ( $t: b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ )
$\mathcal{X}$ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ( $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ )	$t: \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ ( $t: b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$ )
$\mathcal{P}$ : $y^2 = 2px$	$t: y_1y = p(x + x_1)$

**6. Одредити ј-ну тангенте криве:**

- а)  $y^2 = 6x$  у њеној тачки  $M(2, y < 0)$   
 б)  $16x^2 - 25y^2 = 400$  у тачкама пресека са правом  $4x - 3y - 16 = 0$   
 в)  $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$  у њеној тачки  $A(-1, 4)$   
 г)  $x^2 + 3y^2 = 28$  у тачкама пресека са правом  $5x - 3y - 14 = 0$

**7. Одредити једначину:**

- а) хиперболе која додирује праву  $x - y - 2 = 0$  у тачки  $A(4, 2)$ .  
 б) елипсе ако су познате две њене тангенте  $3x - 2y - 20 = 0$  и  $x + 6y - 20 = 0$   
 в) хиперболе чија је једна асимптота  $2y - 3x = 0$   $2y - 3x = 0$ , а тангента  $15x - 8y + 18 = 0$   
 г) кружнице уписане у троугао чије странице имају једначине:  $x + 2y + 5 = 0$ ;  $2x + y - 5 = 0$  и  $x - 2y + 5 = 0$

**8. Одредити једначину и дужину тетиве дате криве која је датом тачком преполовљена:**

- а)  $8x^2 + 9y^2 = 36$ ;  $A(1, 1)$       б)  $x^2 + y^2 = 169$ ,  $A(3, 4)$       в)  $4x^2 - 9y^2 = 36$ ,  $A(5, 1)$       г)  $y^2 = -4x$ ,  $A(-2, -1)$ .

### ЈЕДНАЧИНА ТАНГЕНТЕ НА КРИВУ ИЗ ТАЧКЕ $(X_1, Y_1)$

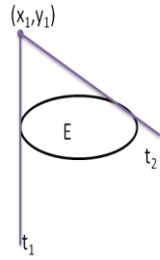
$$t: y = kx + n \Rightarrow k, n = ?$$

- Одредити параметре криве:  $K \rightarrow p, q, r$   
 $H, E \rightarrow a, b$   
 $P \rightarrow p$

$$2. (X_1, Y_1) \in t \Rightarrow y_1 = kx_1 + n \Rightarrow n = y_1 - kx_1$$

- У услов додира праве и криве заменити 1. и 2.  
 $\Rightarrow k \Rightarrow n = y_1 - kx_1$   
(број тангенти зависи од броја решења)

На пример:



- Одредити  $j$ -не тангенти из тачке  $S(10/3, 5/3)$  на криву

$$x^2 + 4y^2 = 20.$$

- Одредити збир коефицијената праваца тангенти на криву  $x^2 + y^2 = 2$  које садрже пресечну тачку правих  $x - y - 1 = 0$  и  $x + y - 3 = 0$ .

- Одредити  $j$ -не тангенти на криву  $x^2 - y^2 = 16$  из тачке  $A(-1, -7)$ .

- Одредити угао под којим се крива  $x^2 + 3y^2 = 12$  види из тачке  $P(0, 4)$ .

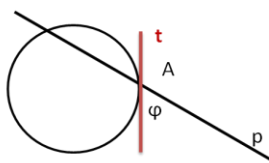
- Одредити  $j$ -ну праве која на  $x$ -оси одсеца одсечак дужине 6 и додирује криву  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ .

- Одредити  $j$ -ну тангенти криве  $4x^2 - 9y^2 = 36$  која одсеца на координатним осама одсечке једнаке дужине.

### УГАО ПОД КОЈИМ СЕ СЕКУ ПРАВА $y=kx+n$ И КРИВА ДРУГОГ РЕДА

- Одредити пресечне тачке праве и криве.
- У једној од пресечних тачака написати једначину тангенти на криву.
- Тражени угао је угао између дате праве и добијене тангенте.

На пример:



$p$  - дата права  
 $A$  - пресечна тачка праве и кружности  
 $t$  - тангента у  $A$  на кружницу  
 $\phi$  - угао између праве и тангенте  $t$ .  
између праве и кружнице

- Одредити угао између:

а)  $y^2 = 4x$  и  $2x + y - 12 = 0$

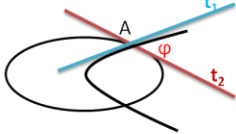
б)  $x - 2y = 0$  и  $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$

в)  $x^2 + 6y^2 = 10$  и  $2x - y + 5 = 0$

### УГАО ПОД КОЈИМ СЕ СЕКУ ДВЕ КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

- Одредити пресечне тачке кривих.
- У једној од пресечних тачака написати једначину тангенте на прву и једначину тангенте на другу криву
- Тражени угао је угао између добијених тангенти.

На пример:



$p$  - дата права  
 $A$  - пресечна тачка параболе и елипсе  
 $t_1$  - тангента у  $A$  на параболу  
 $t_2$  - тангента у  $A$  на елипсу  
 $\phi$  - угао између тангентитиј. између параболе и елипсе

- Одредити угао између:

а)  $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$  и  $y^2 = 3x$

б)  $3x^2 + 4y^2 = 84$  и  $3x^2 - 4y^2 = 12$ .

в)  $x^2 + y^2 = 4$  и  $3x^2 + 4y^2 = 13$

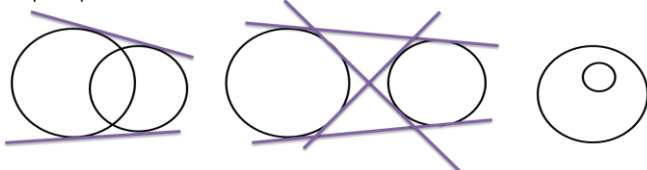
### ЗАЈЕДНИЧКЕ ТАНГЕНТЕ ДВЕ КРИВЕ

Заједничке тангенте су праве  $t: y=kx+n$  које задовољавају услов додира за обе дате криве:

- Одредити параметре прве криве и уврстити их у услов додира те криве и праве  $\Rightarrow$  једначина 1
- Одредити параметре друге криве и уврстити их у услов додира те криве и праве  $\Rightarrow$  једначина 2
- Решење система (једначина 1 и једначина 2) даје вредности за  $k$  и  $n$  тангенте

\*број заједничких тангенти зависи од положаја кривих (=број решења система)

На пример:



- Одредити  $j$ -не заједничких тангенти кривих:

а)  $x^2 + y^2 = 45$  и  $x^2 + y^2 - 20x - 25 = 0$

б)  $6x^2 + 10y^2 = 15$  и  $6x^2 - 10y^2 = 60$

в)  $y^2 = 4x$  и  $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$

г)  $9x^2 + 16y^2 = 144$  и  $16x^2 + 9y^2 = 144$ .

### Аритметички низ (прогресија)

$d$  - разлика (диференцијација) низа је број за који се низ повећава(смањује)

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} \quad d > 0 \text{ (растући низ)} ; d < 0 \text{ (опадајући низ)}$$

$$a_n - \text{општи (n - ти) члан низа } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n - \text{сума n чланова низа } S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d] \text{ или } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$\text{За сваки аритметички низ важи: } a_n = \frac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2}$$

1. Пети члан аритметичког низа је 13 а девети 19. Написати низ.
2. Израчунати  $a_n$  и  $d$  у аритметичком низу ако је :
  - а)  $a_1 = -45, n=31, S_n=0$
  - б)  $a_1 = 16, n=9, S_n=0$
3. Израчунати  $a_1$  и  $d$  ако је:
  - а)  $a_n = 21, n = 7, S_n = 105$
  - б)  $a_n = 105, n = 16, S_n = 840$
4. Израчунати  $n$  и  $S_n$  ако је:
  - а)  $a_1 = 4, d = 5, a_n = 49$
  - б)  $a_1 = 14,5, d = 0,7, a_n = 32$
5. Израчунати  $n$  и  $a_n$  ако је:
  - а)  $a_1 = 41, d = 2, S_n = 4784$
  - б)  $a_1 = 2, d = 5, S_n = 245$
6. Збир прва три члана аритметичког низа је 36, а збир квадрата прва три члана је 482. Одредити низ.
7. Збир прва четири члана аритметичког низа је 26, а производ истих чланова је 880. Одредити низ.
8. У аритметичком низу први члан је 1, а збир првих пет чланова једнак је четвртини збира следећих пет чланова. Одредити низ.
9. У аритметичком низу дато је :  $a_2 + a_5 - a_3 = 10$  и  $a_1 + a_6 = 17$ . Одредити низ.
10. Аритметички низ има 20 чланова. Збир чланова на парним местима је 250, а збир чланова на непарним местима је 220. Одредити два средња члана.
11. Колико чланова треба уметнути између 0 и 12 да би се добио аритметички низ чији је збир 150?
12. Између бројева -5 и 30 уметнути аритметички низ од 6 чланова. Колики је збир свих осам чланова?
13. Одредити четворочлани аритметички низ код којег је збир квадрата средња два члана 468, а збир квадрата крајњих чланова 612.
14. Одредити аритметички низ код којег је збир другог и седмог члана 25, а њихов производ 100.
15. Збир прва три члана аритметичког низа је 15, а збир њихових квадрата је 173. Одредити двадесети члан и збир првих двадесет чланова.
16. Одредити аритметички низ код којег је збир петог и осмог члана 28, а разлика квадрата петог и трећег члана је 72.
17. Пет бројева аритметички низ, њихов збир је 15, а производ 1155. Одредити те бројева.
18. Одредити аритметички низ ако је  $a_1 + a_3 + a_5 = -12$  и  $a_1 a_3 a_5 = -80$ .
19. Одредити аритметички низ ако је збир првог и петог члана  $5/3$ , а производ трећег и четвртог члана  $65/72$ .

20. Количник деветог и другог члана аритметичке прогресије је 5, а при дељењу тринаестог члана са шестим добије се количник 2 и остатак 5. Одредити прогресију.

21. Решити једначине:

а)  $32 \cdot 35 \cdot 38 \cdot \dots \cdot 33n-1 = 2719$

б)  $1+7+13+\dots+x=280$ .

### Геометријски низ (прогресија)

$$q - \text{количник низа } q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$q > 1$  (растући низ) ;  $q < 1$  (опадајући низ)

$$b_n - \text{општи (n - ти) члан низа } b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n - \text{сума n чланова низа } S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$\text{За сваки аритметички низ важи: } b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

1. Израчунати количник геометријског низа ако је његов први члан 1, а шести 1024.
2. Одредити број чланова геометријског низа ако је његов први члан 1, количник 2, а последњи члан 4096.
3. Израчунати први члан геометријског низа ако је збир његових првих дванаест чланова 8190 а количник 2.
4. Одредити геометријски низ ако је :
  - а)  $b_5-b_1=15$  и  $b_4-b_2=6$
  - б)  $b_1+b_3=15$  и  $b_2+b_4=30$
  - ц)  $b_1+b_2+b_3=62$  и  $b_1b_2b_3=1000$
  - д)  $b_2+b_5-b_4=10$  и  $b_3+b_6-b_5=20$
  - е)  $b_1+b_5=1285$  и  $b_2b_4=6400$
6. Одредити шесточлани геометријски низ ако је збир три прва члана 112 а последња три 14.
7. Четири броја чине геометријски низ. Наћи те бројеве ако је први већи од другог за 36 а трећи од четвртог за 4.
8. У геометријском низу је  $b_6-b_4=216$ ,  $b_3-b_1=8$  и  $S_n=40$ . Одредити први члан, количник и број чланова.
9. Број 9750 поделити на четири дела тако да ти делови образују геометријски низ и да је однос разлике крајњих према разлици средњих 19:6.
10. Три броја, чији је збир 57, чине геометријски низ. Средњи члан је  $6/13$  од збира суседних. Одредити те бројеве.
11. Одредити број чланова геометријске прогресије ако су први и други члан 3 и 12 а последњи 3072.
12. Одредити растући геометријски низ у коме је разлика петог и првог члана 10 а разлика четвртог и другог 4.
13. Одредити три броја која чине геометријски низ ако је њихов производ 64 а, а њихова аритметичка средина  $14/3$ .
14. У геометријској прогресији средњи члан је 12. Збир првог и последњег је 51, а збир свих чланова је 93. Колико чланова има ова прогресија?